

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 10

## Fonctions de Bessel

**EPFL**

- 10.1 Equation de Helmholtz cartésienne
- 10.2 Laplacien en coordonnées polaires
- 10.3 Equation de Helmholtz polaire
- 10.4 Equation de Bessel
- 10.5 Particule libre confinée sur un disque
- 10.6 Membrane circulaire vibrante

- **Equation de Helmholtz** : équation d'onde en 3D - champ scalaire

$$(10.1)$$

- **Relation de dispersion** : espace réciproque temporel (Fourier)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \quad (10.2)$$

- **Laplacien** : coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10.3)$$

- **Equation différentielle aux dérivées partielles** : champ scalaire

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (10.4)$$

- **Séparation des variables** : fonctions de variables indépendantes

$$(10.5)$$

- **Equation différentielle aux dérivées totales** : (10.5) dans (10.4)

$$Y(y) Z(x) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) Z(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x) Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 X(x) Y(y) Z(z) = 0 \quad (10.6)$$

- **Equation différentielle** : divisée par  $\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (10.7)$$

- **Système d'équations différentielles ordinaires** : variables indép.

$$X(x) \equiv X_{n_x}(x) \quad \text{et} \quad Y(y) \equiv Y_{n_y}(y) \quad \text{et} \quad Z(z) \equiv Z_{n_x n_y}(z)$$

$$\frac{1}{X_{n_x}(x)} \frac{d^2 X_{n_x}(x)}{dx^2} = -n_x^2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad n_x \in \mathbb{Z} \quad (10.8)$$

$$\frac{1}{Y_{n_y}(y)} \frac{d^2 Y_{n_y}(y)}{dy^2} = -n_y^2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad n_y \in \mathbb{Z} \quad (10.9)$$

$$\frac{1}{Z_{n_x n_y}(z)} \frac{d^2 Z_{n_x n_y}(z)}{dz^2} = - (k^2 - n_x^2 - n_y^2) \quad (10.10)$$

- Solutions du système d'équations différentielles ordinaires :

$$(10.11)$$

$$(10.12)$$

$$(10.13)$$

- **Fonction propres** : champs scalaires  $\phi(x, y, z) \equiv \phi_{n_x n_y}(x, y, z)$

$$\phi_{n_x n_y}(x, y, z) = X_{n_x}(x) Y_{n_y}(y) Z_{n_x n_y}(z) \quad (10.14)$$

- **Fonction propres** : solution de l'équation de Helmholtz (10.1)

$$(10.15)$$

- **Conditions initiales** : fonctions propres

$$\phi_{n_x n_y}(0, 0, 0) = X_{n_x}(0) Y_{n_y}(0) Z_{n_x n_y}(0) \quad (10.16)$$

- **Différentielle** : champ scalaire

$$d\phi(\rho, \varphi) = \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\varphi} d\varphi \quad (10.17)$$

- **Changement de variable** :

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} = \rho \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad (10.18)$$

- **Changement de base** :

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad (10.19)$$

- **Déplacement infinitésimal** : variation du changement de variables

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\rho (\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \rho d\varphi (-\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}) \\ &= d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} \end{aligned} \quad (10.20)$$

- **Différentielle** : champ scalaire : base orthonormée  $(\hat{\rho}, \hat{\varphi})$

$$d\phi(\rho, \varphi) = \left( \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi(\rho, \varphi)}{\partial\varphi} \hat{\varphi} \right) \cdot (d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi}) \quad (10.21)$$

- **Différentielle** : produit scalaire du gradient et du déplacement

$$d\phi(\rho, \varphi) = \nabla \phi(\rho, \varphi) \cdot d\mathbf{r}(\rho, \varphi) \quad (10.22)$$

- **Gradient** : champ scalaire : coordonnées polaires

$$\nabla \phi(\rho, \varphi) = \frac{\partial \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{\rho}(\varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{\varphi}(\varphi) \quad (10.23)$$

- **Opérateur gradient** : coordonnées polaires

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (10.24)$$

- **Dérivées partielles** : vecteurs de base (10.18)

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho} \quad (10.25)$$

- **Opérateur laplacien** : coordonnées polaires (carré du gradient)

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( \hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (10.26)$$

- **Equation de Helmholtz** : coordonnées polaires

$$(10.28)$$

- **Equation différentielle aux dérivées partielles** : coordonnées polaires

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 \phi(\rho, \varphi) = 0 \quad (10.29)$$

- **Séparation des variables** :

$$(10.30)$$

- **Equation différentielle aux dérivées totales** : (10.31)

$$\Phi(\varphi) \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho) \Phi(\varphi) = 0$$

- **Equation différentielle** : divisée par  $R(\rho) \Phi(\varphi) / \rho^2$  (10.32)

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + k^2 \rho^2 + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

- **Systeme d'equations differentielles ordinaires** : variables indep.

$$R(\rho) \equiv R_m(\rho) \quad \text{et} \quad \Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi) \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\Phi_m(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{cste} \quad \text{periode} \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (10.33)$$

$$\frac{\rho^2}{R_m(\rho)} \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R_m(\rho)} \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + k^2 \rho^2 = m^2 = \text{cste} \quad (10.34)$$

- **Fonctions propres angulaires** :

$$(10.35)$$

- **Equation differentielle ordinaire** :

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - m^2) R_m(\rho) = 0 \quad (10.36)$$

- **Fonctions propres** :

$$\Phi_m(\rho, \varphi) = R_m(\rho) \Phi_m(\varphi) \quad (10.37)$$

- **Variable sans dimension :**

$$x = k\rho \quad (10.38)$$

- **Fonction radiale :**

$$K_m(x) = K_m(k\rho) = R_m(\rho) \quad (10.39)$$

- **Equation différentielle radiale :**

$$\rho^2 \frac{d^2 K_m(k\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dK_m(k\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - m^2) K_m(k\rho) = 0 \quad (10.40)$$

- **Opérateur différentiel :** (10.41)

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = k \frac{d}{dx} \quad \text{ainsi} \quad \frac{d^2}{d\rho^2} = k \frac{d}{dx} \left( k \frac{d}{dx} \right) = k^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

- **Equation différentielle de Bessel : fonction radiale**

$$(10.42)$$

- **Fonction propre :** fonction de Bessel de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>e</sup> espèces (10.43)

- **Equation de Bessel :**

$$p_2(x) K_m''(x) + p_1(x) K_m'(x) + (p_0(x) - \lambda_m) K_m(x) = 0 \quad (10.44)$$

- **Polynômes :** équation de Bessel

$$p_2(x) = x^2 \quad \text{et} \quad p_1(x) = x \quad \text{et} \quad p_0(x) = x^2 \quad \text{et} \quad \lambda_m = m^2 \quad (10.45)$$

- **Fonction poids :**

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx'\right) = \frac{1}{x^2} \exp\left(\int^x \frac{dx'}{x'}\right) = \frac{1}{x} \quad (10.46)$$

- **Equation de Bessel :** forme générale de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left( w(x) p_2(x) K_m'(x) \right) + (p_0(x) - \lambda_m) w(x) K_m(x) = 0 \quad (10.47)$$

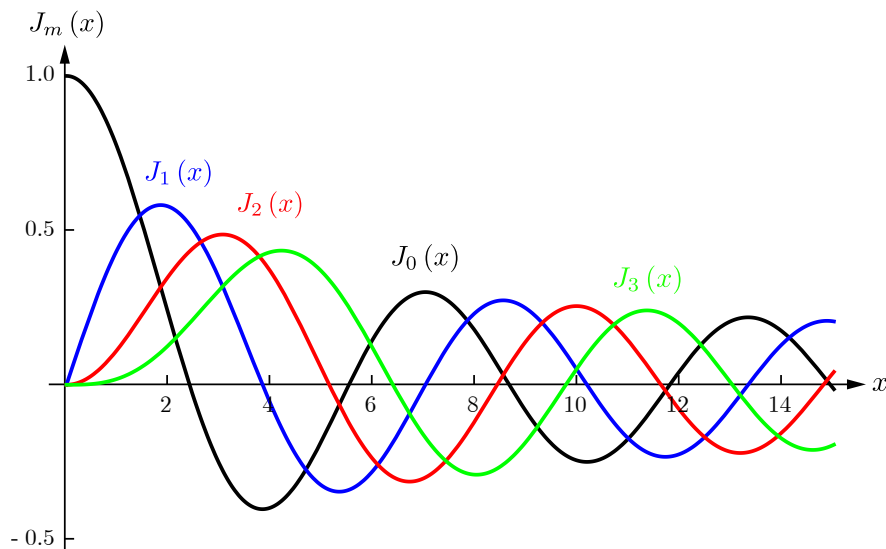
- **Equations différentielles de Bessel :** forme de Sturm-Liouville

$$(10.48)$$

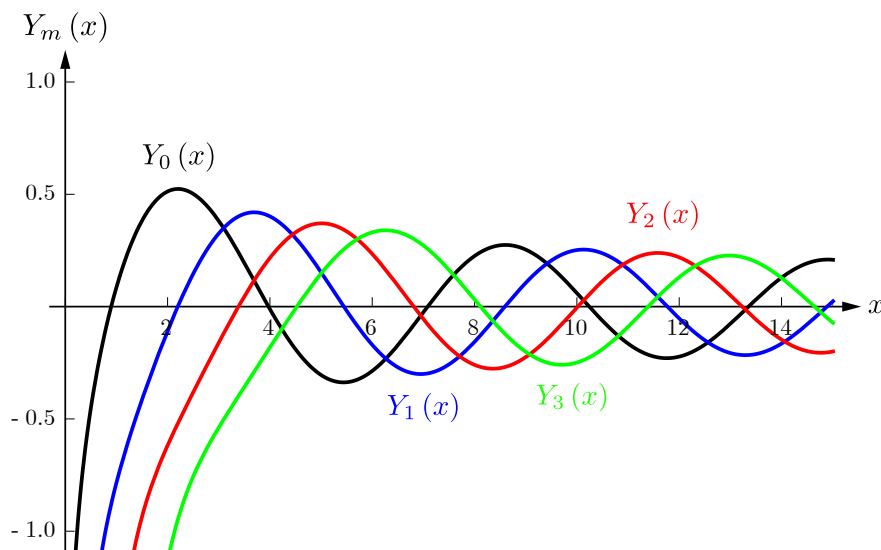
$$(10.49)$$

- Fonctions de Bessel :

- 1 Première espèce :  $J_m(x)$  : continue en  $x = 0$  (paire ou impaire)



- 2 Deuxième espèce :  $Y_m(x)$  : diverge en  $x = 0$



- **Equation de Helmholtz** : continue en  $x = 0$

$$b_m = 0 \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{Z}$$

- **Fonctions propres** : continue en  $x = 0$

$$\phi_m(\rho, \varphi) = a_m J_m(k\rho) e^{im\varphi} \tag{10.50}$$

- **Fonctions propres réelles** : coefficients de Fourier réels

$$\tag{10.51}$$

où les coefficients  $A_m$  et  $B_m$  dépendent de la symétrie ou de l'antisymétrie sous parité des fonctions propres  $\phi_m(\rho, \varphi)$ .

- **Hamiltonien** : particule libre

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla) \cdot (-i\hbar \nabla) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (10.52)$$

- **Equation de Schrödinger stationnaire** :  $\psi(x, y) \in \mathcal{H}$

$$\hat{H} \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad (10.53)$$

- **Equation de Schrödinger stationnaire** : cartésienne

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad (10.54)$$

- **Equation de Helmholtz** : coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0 \quad (10.55)$$

- **Nombre d'onde** :

$$(10.56)$$

- **Equation de Helmholtz** : coordonnées polaires :  $\psi(\rho, \varphi) = \psi(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \psi(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi(\rho, \varphi) = 0 \quad (10.57)$$

- **Fonction d'onde** :  $\psi(\rho, \varphi) \equiv \psi_m(\rho, \varphi)$  continue en  $x = 0$  :  $b_m = 0$

$$\psi_m(\rho, \varphi) = a_m J_m(k\rho) e^{im\varphi} \quad (10.58)$$

- **Condition de confinement** : fonction d'onde : disque de rayon  $r$

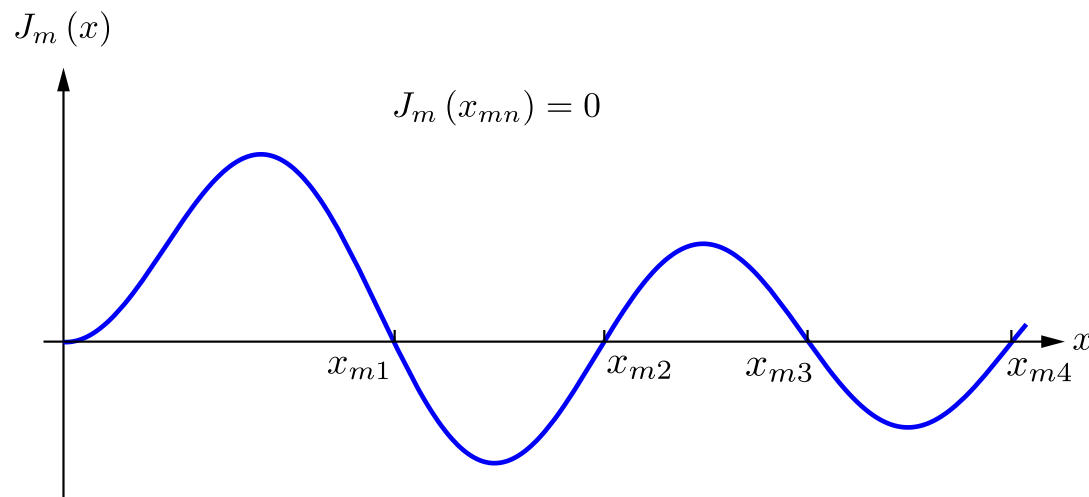
$$(10.59)$$

- **Condition de la fonction d'onde** : (10.58) et (10.59) en  $\rho = r$

$$\psi_m(r, \varphi) = a_m J_m(kr) e^{im\varphi} = 0 \quad (10.60)$$

- **Zéros des fonctions de Bessel** :  $x_{mn}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \equiv k_{mn}$

$$J_m(x_{mn}) = J_m(k_{mn} r) = 0 \quad (10.61)$$



- **Quantification des nombres d'onde :**

$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{r} \quad (10.62)$$

- **Fonction d'onde :**  $\psi_m(\rho, \varphi) \equiv \psi_{mn}(\rho, \varphi)$  dans (10.58) où  $k \equiv k_{mn}$

$$(10.63)$$

- **Niveaux d'énergie :** (10.56) et (10.62)

$$(10.64)$$

- **Equation d'onde** : déformation verticale d'une membrane circulaire

$$(10.65)$$

- **Equation d'onde** : coordonnées polaires : vitesse du son  $c_s$  (10.66)

$$\frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 z(\rho, \varphi, t)}{\partial t^2} = 0$$

- **Séparation des variables** :

$$(10.67)$$

- **Equation d'onde** : (10.67) dans (10.66) divisée par  $z(\rho, \varphi, t)$

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \quad (10.68)$$

- **Système d'équations différentielles** : nombre d'onde  $k$

$$R(\rho) \equiv R_m(\rho) \quad \text{et} \quad \Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi) \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -c_s^2 k^2 = \text{cste} \quad (10.69)$$

$$\frac{1}{\Phi_m(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{cste} \quad (10.70)$$

$$\frac{1}{R_m(\rho)} \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{R_m(\rho)} \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} = \frac{m^2}{\rho^2} - k^2 = \text{cste} \quad (10.71)$$

- **Système d'équations différentielles** : remis en forme

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - m^2) R_m(\rho) = 0 \quad (10.72)$$

$$\frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m(\varphi) = 0 \quad (10.73)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c_s^2 k^2 T(t) = 0 \quad (10.74)$$

- **Fonctions propres de déformation verticale** :  $z(\rho, \varphi, t) \equiv z_m(\rho, \varphi, t)$

$$z_m(\rho, \varphi, t) = R_m(\rho) \Phi_m(\varphi) T(t) \quad (10.75)$$

- **Condition au bord** : membrane circulaire de rayon  $\rho = r$

$$(10.76)$$

- **Modes de déformation** : analogie : particule confinée sur un disque

$$z_{mn}(\rho, \varphi, t) = a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{im\varphi} \quad \text{où} \quad k \equiv k_{mn} \quad (10.77)$$

- **Relation de dispersion** : quantifiée

$$\omega_{mn} = c_s k_{mn} \quad (10.78)$$

- **Evolution temporelle**: solution de l'équation différentielle (10.74)

$$T(t) = b^- e^{-i\omega_{mn} t} + b^+ e^{i\omega_{mn} t} \quad (10.79)$$

- **Modes de déformation verticale** : (10.76) et (10.78) dans (10.67)

$$z_{mn}(\rho, \varphi, t) = b^- a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{i(m\varphi - \omega_{mn} t)} + b^+ a_m J_m(k_{mn} \rho) e^{i(m\varphi + \omega_{mn} t)} \quad (10.80)$$

- Modes de déformation verticale réels :

$$z_{mn}(\rho, \varphi, t) = \left( A_m^- \cos(m\varphi - \omega_{mn} t) + B_m^- \sin(m\varphi - \omega_{mn} t) + A_m^+ \cos(m\varphi + \omega_{mn} t) + B_m^+ \sin(m\varphi + \omega_{mn} t) \right) J_m(k_{mn} \rho) \quad (10.81)$$

- Modes stationnaires :

$$A_m = \frac{1}{2} A_m^- = \frac{1}{2} A_m^+ \quad \text{et} \quad B_m = \frac{1}{2} B_m^- = \frac{1}{2} B_m^+ \quad (10.82)$$

- Formules de trigonométrie :  $a = m\varphi$  et  $b = \omega_{mn} t$

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b) \quad (10.83)$$

- Modes stationnaires de déformation verticale :

$$(10.84)$$

- **Déformation verticale** : modes :  $z_{01}(\rho, \varphi, t)$   $z_{02}(\rho, \varphi, t)$   $z_{03}(\rho, \varphi, t)$

- **Déformation verticale** : modes :  $z_{11}(\rho, \varphi, t)$   $z_{12}(\rho, \varphi, t)$   $z_{13}(\rho, \varphi, t)$

- **Déformation verticale** : modes :  $z_{21}(\rho, \varphi, t)$   $z_{22}(\rho, \varphi, t)$   $z_{23}(\rho, \varphi, t)$